

PROPAGACIÓN DE ONDAS POCO PROFUNDAS EN CANALES ABIERTOS

Víctor Miguel Ponce y Daryl B. Simons

[Versión original: Ponce, V. M. y D. B. Simons. 1977. "Shallow wave propagation in open channel flow". *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 103, HY12, Proc. Paper 13392, December, 1461-1476].

RESUMEN

Las características de propagación de varios tipos de ondas poco profundas en el flujo de un canal abierto son calculadas sobre la base de la teoría de la estabilidad lineal. Se deriva las funciones de celeridad y atenuación de las ondas cinemática, difusiva, dinámica convectiva, dinámica y de gravedad. Para el caso más general, es decir, el modelo de onda dinámica, las características de propagación son expresadas en función del número de Froude del flujo uniforme permanente y el número de onda adimensional del componente no permanente del movimiento. Para el modelo dinámico, el espectro del número de onda se divide en tres grupos: (1) Un grupo de gravedad, que corresponde a un número de onda grande, donde la celeridad es la celeridad de la onda de gravedad; (2) un grupo cinemático, que corresponde a un número de onda pequeño, donde la celeridad es la celeridad de la onda cinemática; y (3) un grupo dinámico, que corresponde a los valores medios del espectro, donde la celeridad se encuentra entre los valores de celeridad de gravedad y cinemática.

1. INTRODUCCIÓN

A través de los años, varios investigadores han intentado aclarar el fenómeno de la propagación de ondas poco profundas en el flujo en un canal abierto. Quizás el más esclarecedor de estos estudios es el reportado en el artículo clásico de Lighthill y Whitham, que analizó en detalle el concepto de onda cinemática y lo contrastó con el de onda dinámica (5). La fórmula de Lagrange para la celeridad de las ondas de gravedad poco profundas también ha sido objeto de considerable atención en la literatura (3). A pesar de los avances logrados en la comprensión del fenómeno físico, aún no se ha formulado una teoría coherente que explique tanto la celeridad como las características de atenuación. En este sentido, la teoría de la estabilidad lineal puede ser utilizada como una herramienta eficaz no solo para proporcionar un análisis de primera aproximación, sino también para revelar información valiosa sobre la física subyacente del problema (6).

El análisis que aquí se presenta intenta aplicar la teoría de la estabilidad lineal al conjunto de ecuaciones que gobiernan el movimiento del flujo en canales abiertos. Las ecuaciones son las denominadas ecuaciones de Saint Venant, que son expresiones analíticas del principio de conservación de masa y momento (1). Las conclusiones se refieren a la magnitud de la celeridad y atenuación de varios tipos de ondas en aguas poco profundas, expresadas como una función del número de Froude del flujo uniforme permanente y un número de onda adimensional del componente no permanente del movimiento.

2. ECUACIONES DE GOBIERNO

Las ecuaciones que gobiernan el flujo no permanente unidimensional en canales anchos de sección transversal rectangular, expresadas por unidad de ancho de canal, son la ecuación de continuidad (4):

$$u \frac{\partial d}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

y la ecuación de movimiento (2):

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial x} + (S_f - S_o) = 0 \quad (2)$$

en las cuales:

u = velocidad promedio en una sección vertical,

d = profundidad del flujo,

g = aceleración de la gravedad,

S_f = pendiente de fricción, y

S_o = pendiente de fondo.

La pendiente de fricción S_f está directamente relacionada con el esfuerzo cortante de fondo τ por la expresión (2):

$$S_f = \frac{\tau}{\gamma d} \quad (3)$$

en la cual γ = peso unitario del agua.

Siguiendo la forma habitual de los cálculos de estabilidad, las Ecs. 1 y 2 deben satisfacer el flujo no perturbado para el cual $u = u_o$; $d = d_o$; y $\tau = \tau_o$, así como el flujo perturbado para el cual $u = u_o + u'$; $d = d_o + d'$; y $\tau = \tau_o + \tau'$ (7). El superíndice en las variables de flujo representa una pequeña perturbación del flujo uniforme permanente. Por lo tanto, todos los términos cuadráticos de las componentes fluctuantes pueden despreciarse debido a un razonamiento de orden de magnitud.

La sustitución de las variables de perturbación en las Ecs. 1, 2 y 3, después de linealizar (5):

$$u_o \frac{\partial d'}{\partial x} + d_o \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial d'}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{u_o}{g} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial d'}{\partial x} + S_o \left(\frac{\tau'}{\tau_o} - \frac{d'}{d_o} \right) = 0 \quad (5)$$

En la Ecuación 5:

$$S_o = \frac{\tau_o}{\gamma d_o} \quad (6)$$

El esfuerzo cortante τ puede relacionarse con la velocidad media de la siguiente forma:

$$\tau = f \rho u^2 \quad (7)$$

en la cual:

$$f = \frac{g}{C_f^2} \quad (8)$$

El valor C_f = coeficiente de Chezy; y ρ = densidad del agua. Considerando la Ec. 7, la Ec. 5 se puede reescribir como.

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{u_o}{g} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial d'}{\partial x} + S_o \left(2 \frac{u'}{u_o} - \frac{d'}{d_o} \right) = 0 \quad (9)$$

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, se prefiere la ecuación de Manning a la ecuación de Chezy. Esta última, sin embargo, tiene la ventaja de la no dimensionalidad, y es por esta razón que se usa aquí. Además, la constante C_f es consistente con el supuesto de una pequeña perturbación.

3. MODELOS DE ONDA

La propagación de las ondas en aguas poco profundas está controlada por el balance de las diversas fuerzas incluidas en la ecuación de movimiento. En la Ec. 2, el primer término representa la inercia local, el segundo la inercia convectiva, el tercer término la diferencia de presiones y el cuarto representa la fricción y la pendiente de fondo. Se pueden construir varios modelos de onda, dependiendo de cuál de estos cuatro términos se considere insignificante en comparación con los términos restantes.

La siguiente tabla proporciona una referencia rápida a los distintos modelos de ondas que son reconocidos en la práctica.

Términos	I	II	III	IV
Ecuación de movimiento (2)	$+\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$	$+\frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x}$	$+\frac{\partial d}{\partial x}$	$+(S_f - S_o)$

El modelo de onda y los términos usados para describirlo son: (1) Onda cinemática IV; (2) onda de difusión III + IV; (3) onda dinámica estable II + III + IV; (4) onda dinámica I + II + III + IV; y (5) onda de gravedad I + II + III.

4. ANÁLISIS DE PEQUEÑAS PERTURBACIONES

Con el fin de proporcionar una forma conveniente de tener en cuenta explícitamente los diversos modelos de onda, la Ec. 9 queda redefinida como:

$$\frac{l}{g} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{a u_o}{g} \frac{\partial u'}{\partial x} + p \frac{\partial d'}{\partial x} + k S_o \left(2 \frac{u'}{u_o} - \frac{d'}{d_o} \right) = 0 \quad (10)$$

En la cual l , a , p y k son números enteros y pueden tomar valores de 0 a 1 solamente, dependiendo de qué términos de la Ec. 9 se utilicen para describir el movimiento.

La solución para una pequeña perturbación se postula en la siguiente forma exponencial:

$$\frac{d'}{d_o} = d_* e^{i(\sigma_* x_* - \beta_* t_*)} \quad (11)$$

en la cual d' es una pequeña perturbación de d_0 ; d_* es una función adimensional de amplitud de profundidad; σ_* es un número de onda adimensional, β_* es un factor de propagación adimensional complejo, y x_* y t_* son coordenadas espaciales y temporales adimensionales tales que:

$$\sigma_* = \left(\frac{2\pi}{L}\right) L_0 \quad (12)$$

$$\beta_{*R} = \left(\frac{2\pi}{L}\right) \frac{L_0}{u_0} \quad (13)$$

$$\beta_{*I} = \text{factor de propagación de amplitud} \quad (14)$$

$$x_* = \frac{x}{L_0} \quad (15)$$

$$t_* = t \frac{u_0}{L_0} \quad (16)$$

en la cual L = longitud de onda de la perturbación; y T = período. El valor L_0 = longitud horizontal en la cual el flujo uniforme permanente desciende una altura igual a su profundidad, y se define como $L_0 = d_0 / S_0$. La celeridad adimensional de la perturbación viene dada por:

$$c_* = \frac{L/T}{u_0} = \frac{\beta_{*R}}{\sigma_*} \quad (17)$$

La atenuación de la onda sigue una ley exponencial en la que la amplitud en un tiempo dado t = amplitud inicial en el tiempo t_0 multiplicada por $(e^{(\beta_{*I} t_*)})$, en la cual $t_* = (t - t_0)u_0/L_0$. Cuando comparamos las amplitudes de onda después de un período de propagación, el valor de t_* es $t_* = Tu_0/L_0$, o igualmente, $t_* = 2\pi/|\beta_{*R}|$. El decremento logarítmico δ se define como $\delta = \beta_{*I}Tu_0/L_0$, ó $\delta = 2\pi\beta_{*I}/|\beta_{*R}|$ (10). El valor de δ es una medida de la velocidad a la que el componente no permanente del movimiento cambia con la propagación. Para δ positivo, se produce amplificación; para δ negativo, el movimiento se atenúa y eventualmente desaparece.

La profundidad de perturbación está asociada con una velocidad de perturbación de la forma:

$$\frac{u'}{u_0} = u_* e^{i(\sigma_* x_* - \beta_* t_*)} \quad (18)$$

en la cual u_* es una función adimensional de amplitud de velocidad. La sustitución de las Ecs. 11 y 18 en las Ecs. 4 y 10 lleva, respectivamente, a lo siguiente:

$$\sigma_* u_* + (\sigma_* - \beta_*) d_* = 0 \quad (19)$$

$$[2k + iF_0^2(\alpha\sigma_* - l\beta_*)]u_* + (ip\sigma_* - k)d_* = 0 \quad (20)$$

en la cual:

$$F_0^2 = \frac{u_0^2}{gd_0} \quad (21)$$

Las ecuaciones 19 y 20 constituyen un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con las incógnitas u_* y d_* . Para que la solución no sea trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse. En consecuencia,

$$il\beta_*^2 F_o^2 - i\sigma_*^2(p - aF_o^2) + 3k\sigma_* - 2k\beta_* - i\sigma_*\beta_*(l + a)F_o^2 = 0 \quad (22)$$

La Ec. 22 es la ecuación característica que gobierna la propagación de ondas de pequeña amplitud. En el tratamiento que sigue, se realizarán aproximaciones sucesivas para ajustarse a los diversos tipos de modelos de ondas considerados en la sección anterior.

5. MODELO DE ONDA CINEMÁTICA

En el modelo de onda cinemática, los términos de inercia y presión son despreciables en comparación con los términos de pendiente de fondo y de fricción.

En consecuencia, en la Ec. 22, $l = a = p = 0$; y $k = 1$, resultando en:

$$3\sigma_* - 2\beta_* = 0 \quad (23)$$

Dado que todos los términos imaginarios se han eliminado en la Ec. 23, $\beta_{*I} = 0$; y $\beta_{*R} = \beta_*$. El decremento logarítmico δ_k , es entonces:

$$\delta_k = 2\pi \frac{\beta_{*I}}{\beta_{*R}} = 0 \quad (24)$$

y la celeridad adimensional de la onda cinemática es:

$$c_{*k} = \frac{\beta_{*R}}{T} = \frac{3}{2} \quad (25)$$

Las Ecuaciones 23-25 justifican las siguientes conclusiones con respecto a la propagación de ondas cinemáticas: (1) Dado que la Ec. 23 es de primer orden, las ondas cinemáticas se propagan solo en la dirección aguas abajo; (2) la celeridad de una onda cinemática es independiente de F_o y σ_* e igual a 1.5 veces la velocidad media del flujo; y (3) la atenuación de una onda cinemática es cero, es decir, una onda cinemática se propaga corriente abajo sin disipación.

6. MODELO DE ONDA DE DIFUSIÓN

En el modelo de onda de difusión, los términos de inercia se consideran despreciables, pero el término de presión se tiene en cuenta en los cálculos. En consecuencia, en la Ec. 22, $l = a = 0$; $p = k = 1$, resultando en:

$$i\sigma_*^2 + 3\sigma_* - 2\beta_* = 0 \quad (26)$$

y

$$\beta_* = \frac{3\sigma_* - i\sigma_*^2}{2} \quad (27)$$

La celeridad de la onda de difusión es:

$$c_{*d} = \frac{\beta_{*R}}{\sigma_*} = \frac{3}{2} \quad (28)$$

El decremento logarítmico de la onda de difusión es:

$$\delta_d = 2\pi \frac{\beta_{*I}}{\beta_{*R}} = -2\pi \left(\frac{\sigma_*}{3} \right) \quad (29)$$

Las siguientes conclusiones son aplicables a las ondas de difusión: (1) Debido a que la Ec. 26 es de primer orden en β_* , las ondas de difusión se propagan sólo aguas abajo, y su celeridad es independiente de F_o y σ_* e igual a 1.5 de la velocidad media del flujo; y (2) las ondas de difusión se atenúan a medida que se propagan aguas abajo, y la tasa de atenuación es controlada por el número de onda adimensional σ_* . Cuanto mayor sea el número de onda adimensional, mayor será la atenuación.

7. MODELO DE ONDA DINÁMICA PERMANENTE

En el modelo de onda dinámica permanente, el término de inercia convectiva se incluye en el problema y se desprecia el término de inercia local. En consecuencia, en la Ec. 22, $l = 0$; y $a = p = k = 1$, resultando en.

$$-i\sigma_*^2(1 - F_o^2) + 3\sigma_* - 2\beta_* - i\sigma_*\beta_*F_o^2 = 0 \quad (30)$$

y

$$\beta_* = \frac{3\sigma_* - i\sigma_*^2(1 - F_o^2)}{2 + i\sigma_*F_o^2} \quad (31)$$

ó

$$\beta_* = \frac{\sigma_*[6 - \sigma_*^2F_o^2(1 - F_o^2)] - i\sigma_*^2(2 + F_o^2)}{4 + \sigma_*^2F_o^4} \quad (32)$$

De la Ec. 32, la celeridad del modelo dinámico permanente es:

$$c_{*s} = 1 + \frac{2 - \sigma_*^2F_o^2}{4 + \sigma_*F_o^2} \quad (33)$$

El decremento logarítmico del modelo dinámico permanente es:

$$\delta_s = -2\pi \frac{\sigma_*(2 + F_o^2)}{|6 - \sigma_*^2F_o^2(1 - F_o^2)|} \quad (34)$$

Las siguientes conclusiones son derivadas con respecto al modelo dinámico permanente: (1) La propagación de la onda dinámica permanente es en una dirección, ya que la Ec. 30 es de primer orden en β_* ; y (2) las características de celeridad y atenuación son funciones del número de Froude F_o del flujo uniforme permanente y del número de onda adimensional σ_* .

8. MODELO DE ONDA DINÁMICA

En el modelo de onda dinámica, se consideran todos los términos de la ecuación de movimiento. Por lo tanto, en la Ec. 22, $l = a = p = k = 1$. De ello se deduce que:

$$F_o^2\beta_*^2 - 2(\sigma_*F_o^2 - i)\beta_* - [\sigma_*^2(1 - F_o^2) + 3\sigma_*i] = 0 \quad (35)$$

La Ecuación 35 es de segundo orden, lo que resulta en dos raíces. Desde el punto de vista físico, las ondas dinámicas se propagan a lo largo de dos trayectorias características, que puede ser, ya sea: (1) una, aguas arriba y otra, aguas abajo; o (2) ambas aguas abajo. En el caso de que la propagación se dé en diferentes direcciones, es conveniente definir como onda primaria la onda que viaja aguas abajo, e identificar su celeridad y decremento logarítmico como c_{*1} y δ_1 ,

respectivamente; la onda secundaria se define como la onda que viaja aguas arriba con celeridad c_{*2} y decremento logarítmico δ_2 . En el caso de que ambas ondas viajen aguas abajo, la onda primaria es la onda más rápida y la onda secundaria es la más lenta.

La solución de la Ec. 35 es:

$$\beta_* = \sigma_*(1 - i\zeta) + \sigma_* \left[\left(\frac{1}{F_o^2} - \zeta^2 \right) + i\zeta \right]^{1/2} \quad (36)$$

en la cual:

$$\zeta = \frac{1}{\sigma_* F_o^2} \quad (37)$$

Una expresión del mismo tipo que la Ec. 37 se conoce en la literatura como número de flujo cinemático (9).

El argumento de la raíz cuadrada compleja se puede expresar en forma polar como sigue:

$$A + iB = C(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (38)$$

en la cual:

$$A = \frac{1}{F_o^2} - \zeta^2 \quad (39)$$

$$B = \zeta \quad (40)$$

$$C = \left[\left(\frac{1}{F_o^2} - \zeta^2 \right)^2 + \zeta^2 \right]^{1/2} \quad (41)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad (42)$$

y la raíz del argumento complejo es:

$$(A + iB)^{1/2} = C^{1/2} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) \right]; \text{ para } k = 0,1 \quad (43)$$

Usando las relaciones de ángulo medio tenemos:

$$(A + iB)^{1/2} = \pm C^{1/2} \left[\left(\frac{1 + \cos\theta}{2} \right)^{1/2} + i \left(\frac{1 - \cos\theta}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (44)$$

en la cual se ha hecho uso del caso en el que para $\zeta \geq 0$, $\theta/2$ se encuentra en el primer cuadrante. Desde que:

$$\cos\theta = \frac{A}{C} \quad (45)$$

se concluye que:

$$(A + iB)^{1/2} = \pm \left[\left(\frac{C + A}{2} \right)^{1/2} + i \left(\frac{C - A}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (46)$$

o bien:

$$\beta_* = \sigma_* (1 - i\zeta) \pm \sigma_* \left[\left(\frac{C+A}{2} \right)^{1/2} + i \left(\frac{C-A}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (47)$$

de la Ec. 47, se obtienen las siguientes dos raíces:

$$\beta_{*1} = \sigma_* \left[1 + \left(\frac{C+A}{2} \right)^{1/2} \right] - i \sigma_* \left[\zeta - \left(\frac{C-A}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (48)$$

$$\beta_{*2} = \sigma_* \left[1 - \left(\frac{C+A}{2} \right)^{1/2} \right] - i \sigma_* \left[\zeta + \left(\frac{C-A}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (49)$$

definiendo:

$$D = \left(\frac{C+A}{2} \right)^{1/2} \quad (50)$$

y

$$E = \left(\frac{C-A}{2} \right)^{1/2} \quad (51)$$

las funciones de celeridad y atenuación vienen dadas por las siguientes relaciones:

para la onda primaria:

$$c_{*1} = 1 + \left(\frac{C+A}{2} \right)^{1/2} \quad (52)$$

$$\delta_1 = -2\pi \frac{\zeta - E}{|1 + D|} \quad (53)$$

para la onda secundaria:

$$c_{*2} = 1 - \left(\frac{C+A}{2} \right)^{1/2} \quad (54)$$

$$\delta_2 = -2\pi \frac{\zeta + E}{|1 - D|} \quad (55)$$

TABLA 1. Características de propagación de ondas en aguas poco profundas en el flujo en canales abiertos.

Tipo de onda (1)	Celeridad relativa c_{*r} (2)	Decremento logarítmico δ (3)
Cinemática	1/2	0
Difusión	1/2	$-2\pi(\sigma_*/3)$
Dinámica permanente	$(2 - \sigma_*^2 Fo^2)/(4 + \sigma_*^2 Fo^4)$	$-2\pi\sigma_*(2 + Fo^2)/ 6 - \sigma_*^2 Fo^2(1 - Fo^2) $
(a) Dinámica		
Onda primaria	$+[C + A]/2]^{1/2}$	$-2\pi(\zeta - E)/ 1 + D $
Onda secundaria	$-[C + A]/2]^{1/2}$	$-2\pi(\zeta + E)/ 1 - D $
(b) Gravedad		
Onda primaria	$+1/Fo$	0
Onda secundaria	$-1/Fo$	0
Notas: $\zeta = \frac{1}{\sigma_* Fo^2}$; $A = \left(\frac{1}{Fo^2}\right) - \zeta^2$; $C = \left\{ \left[\left(\frac{1}{Fo^2}\right) - \zeta^2 \right]^2 + \zeta^2 \right\}^{1/2}$; $D = \left[\frac{C+A}{2} \right]^{1/2}$; $E = \left[\frac{C-A}{2} \right]^{1/2}$		

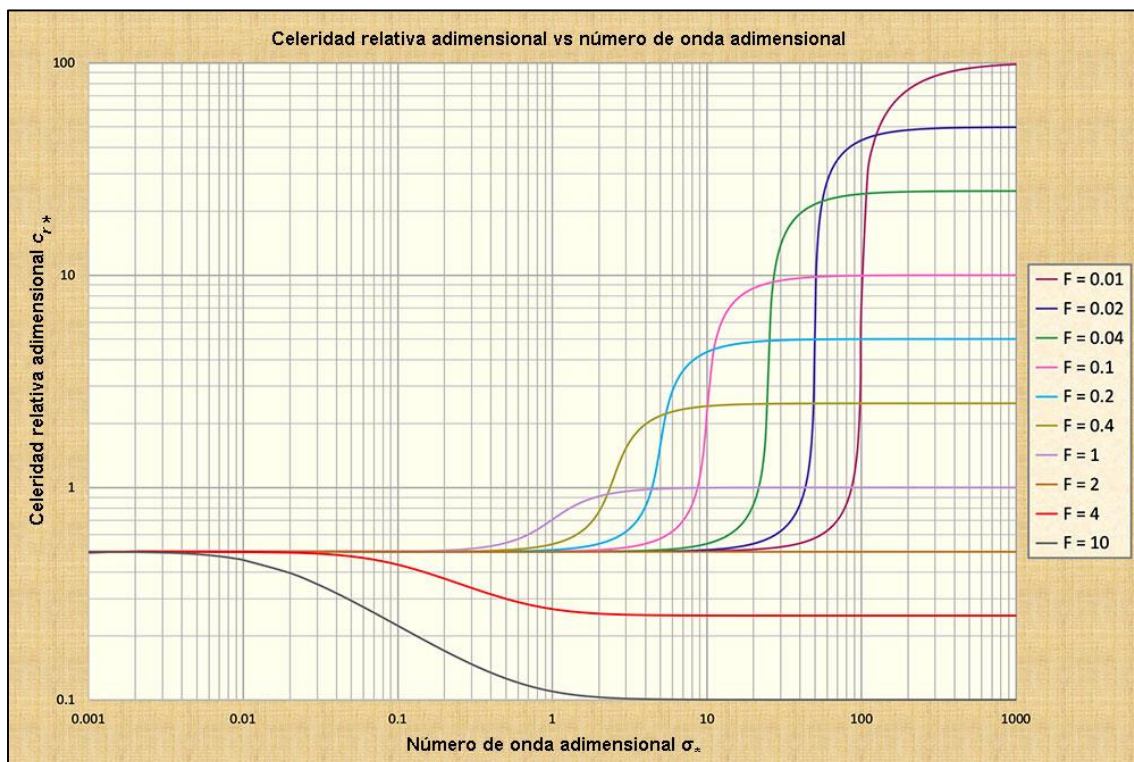


Fig. 1 Celeridad relativa adimensional c_{*r} versus el número de onda adimensional σ_* ; parámetro de curva: número de Froude Fo ($0.01 \leq Fo \leq 10$).

9. MODELO DE ONDA DE GRAVEDAD

En el modelo de onda de gravedad, los términos de fricción y pendiente de fondo son excluidos de la ecuación del momento. De ello se deduce que, en la Ec. 22, $l = a = p = 1$; y $k = 0$, resultando en:

$$\beta_*^2 F_o^2 - 2\sigma_* \beta_* F_o^2 - \sigma_*^2 (1 - F_o^2) = 0 \quad (56)$$

Dado que la Ec. 56 es de segundo orden en β_* y no contiene términos imaginarios, las ondas de gravedad tienen dos direcciones características y no están sujetas a atenuación.

Resolviendo para β_{*R} en la Eq. 56:

$$\beta_{*R} = \sigma_* \left(\frac{F_o^2 \pm F_o}{F_o^2} \right) \quad (57)$$

y la celeridad de una onda de gravedad está dada por:

$$c_{*g} = \frac{\beta_{*R}}{\sigma_*} = 1 \pm \frac{1}{F_o^2} \quad (58)$$

o, de la forma más habitual de expresarlo (la fórmula de Lagrange):

$$c_g = u_o \pm (gd_o)^{1/2} \quad (59)$$

Las ondas de gravedad se propagan a lo largo de dos direcciones características. En el flujo subcrítico, una dirección es aguas abajo con celeridad $c_1 = u_o + (gd_o)^{1/2}$, y la otra es aguas arriba, con celeridad $c_2 = u_o - (gd_o)^{1/2}$. En el flujo crítico, $c_1 = 2u_o$; y $c_2 = 0$. En el flujo supercrítico, ambas ondas viajan aguas abajo, con celeridades

$$c_1 = u_o + (gd_o)^{1/2}; \text{ y } c_2 = u_o - (gd_o)^{1/2}.$$

La Tabla 1 contiene un resumen de las características de propagación de las ondas. La celeridad que se muestra en la Tabla 1 es la celeridad relativa c_{*r} , en la cual:

$$c_{*r} = c_* - 1 \quad (60)$$

10. ANÁLISIS DEL MODELO DE ONDA DINÁMICA

Las Ecuaciones 52-55 permiten calcular las características de propagación del modelo de onda dinámica, en función del número de Froude F_o del flujo uniforme permanente y el número de onda adimensional σ_* de la perturbación sinusoidal superpuesta.

La Figura 1 muestra los valores calculados de la celeridad relativa adimensional c_{*r} versus el número de onda adimensional σ_* para números de Froude entre 0.01 y 10. Se derivan las siguientes conclusiones:

1. Hay tres grupos bien definidos en el espectro del número de onda: (a) un grupo cinemático correspondiente a valores pequeños del número de onda σ_* , en la cual la celeridad relativa c_{*r} es independiente tanto de σ_* como del número de Froude F_o ; (b) un grupo de gravedad correspondiente a valores grandes de σ_* , en la cual c_{*r} es independiente de σ_* y depende únicamente de F_o ; y (c) un grupo dinámico, en la que c_{*r} es una función tanto de σ_* como de F_o .

- En el grupo cinemático, c_{*r} se aproxima asintóticamente a un valor constante de 0.5, que corresponde al de una onda cinemática. En el grupo de gravedad, c_{*r} se aproxima asintóticamente al valor $1/F_o$, que corresponde al de una onda de gravedad. En el grupo dinámico, c_{*r} se encuentra entre los valores de celeridad de las ondas de gravedad y cinemática.
- La ubicación del grupo dinámico en el espectro de σ_* es una función de F_o .

Un corolario resultante de la Fig. 1 es que para $F_o = 2$, $c_{*r} = 0.5$ para todos los valores de σ_* . Así, para $F_o = 2$, todas las ondas, cinemática, dinámica y de gravedad, tienen celeridades iguales al valor cinemático. Las conclusiones de la Fig. 1 con respecto al valor límite de c_{*r} , en los grupos cinemático y de gravedad se pueden obtener analíticamente con base en la teoría de límites. Se puede demostrar que cuando $\sigma_* \rightarrow \infty$, $c_{*r} \rightarrow 1/F_o$, y cuando $\sigma_* \rightarrow 0$, $c_{*r} \rightarrow 0.5$ (para F_o constante).

El cálculo de los decrementos logarítmicos δ_1 y δ_2 en función de σ_* y F_o , mediante las Ecs. 53 y 55 permiten las siguientes conclusiones generales:

- Para $F_o < 2$, las ondas primarias se propagan aguas abajo y se atenúan; para $F_o = 2$, las ondas primarias se propagan aguas abajo y no se amplifican ni atenúan en todo el espectro de σ_* ; para $F_o > 2$ las ondas primarias se propagan aguas abajo y se amplifican.
- Para $F_o < 1$, las ondas secundarias se propagan aguas arriba ($c_{*r} > 1$) o aguas abajo ($c_{*r} < 1$). Para $F_o = 1$, las ondas secundarias permanecen estacionarias ($c_{*r} = 1$), o se propagan aguas abajo ($c_{*r} < 1$). Para $F_o > 1$, las ondas secundarias se propagan aguas abajo. Las ondas secundarias se atenúan para todos los valores de F_o y σ_* .

La Tabla 2 resume las conclusiones del párrafo anterior.

TABLA 2. Características de celeridad ^a y atenuación ^b de la onda dinámica.				
Número de Froude (1)	Onda primaria		Onda secundaria	
	c_{*1} (2)	δ_1 (3)	c_{*2} (4)	δ_2 (5)
$F_o < 1$	+	-	-	-
			+	-
$F_o = 1$	+	-	0	-
			+	-
$1 < F_o < 2$	+	-	+	-
$F_o = 2$	+	0	+	-
$F_o > 2$	+	+	+	-

^a Celeridad aguas abajo +; celeridad aguas arriba -.

^b Atenuación -; amplificación +.

Análisis de la atenuación de la onda primaria, $F_o < 2$. La Figura 2 muestra la variación del decremento logarítmico δ_1 para $F_o < 2$, en función de σ_* . Se extraen las siguientes conclusiones: (1) El decremento logarítmico δ_1 es máximo (en valor absoluto) a un valor de σ_* correspondiente al punto de inflexión de la curva c_{*r} versus σ_* (Fig. 1). El valor de σ_* para el cual δ_1 es máximo (en valor absoluto) disminuye al aumentar F_o ; y (2) el decremento logarítmico δ_1 es mínimo (en valor absoluto) en ambos extremos del espectro de σ_* . Cuando $\sigma_* \rightarrow 0$, entonces $\delta_1 \rightarrow 0$, lo cual corresponde al caso de la onda cinemática; cuando $\sigma_* \rightarrow \infty$, entonces $\delta_1 \rightarrow 0$, lo cual corresponde al caso de la onda de gravedad.

Una conclusión general que se deriva de la Fig. 2, se refiere al hecho de que para $F_o < 2$, las ondas primarias están sujetas a una atenuación muy fuerte en el grupo dinámico y a una atenuación muy débil en los grupos cinemático y de gravedad.

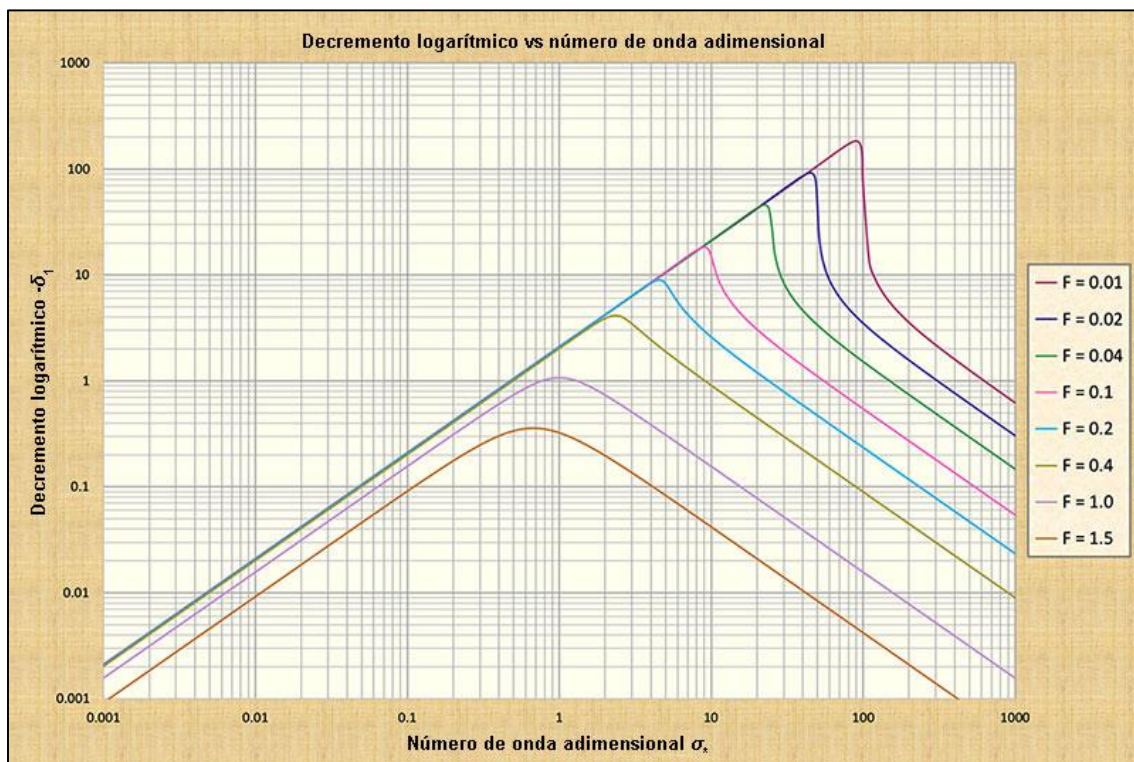


Fig. 2 Decremento logarítmico $-\delta_1$ de la onda primaria versus al número de onda adimensional σ_* ; parámetro de curva: número de Froude F_o ($F_o < 2$).

Análisis de la amplificación de la onda primaria, $F_o > 2$. La Figura 3 muestra la variación del decremento logarítmico δ_1 , para $F_o > 2$, en función de σ_* . Se extraen las siguientes conclusiones: (1) El decremento decremento/incremento logarítmico δ_1 tiene un valor máximo positivo en un valor de σ_* correspondiente al punto de inflexión de la curva c_{*r} versus σ_* (Fig. 1). El valor de σ_* para el cual δ_1 es máximo disminuye al aumentar F_o ; y (2) el decremento logarítmico δ_1 es mínimo en ambos extremos del espectro σ_* . Cuando $\sigma_* \rightarrow 0$, entonces $\delta_1 \rightarrow 0$, lo cual corresponde al caso de la onda cinemática; cuando $\sigma_* \rightarrow \infty$, entonces $\delta_1 \rightarrow 0$, lo cual corresponde al caso de la onda de gravedad.

Una conclusión general derivada de la Fig. 3 se relaciona con el hecho de que para $F_o > 2$, las ondas primarias estarán sujetas a una amplificación muy fuerte en el grupo dinámico y a una amplificación muy débil en el grupo cinemático y de gravedad.

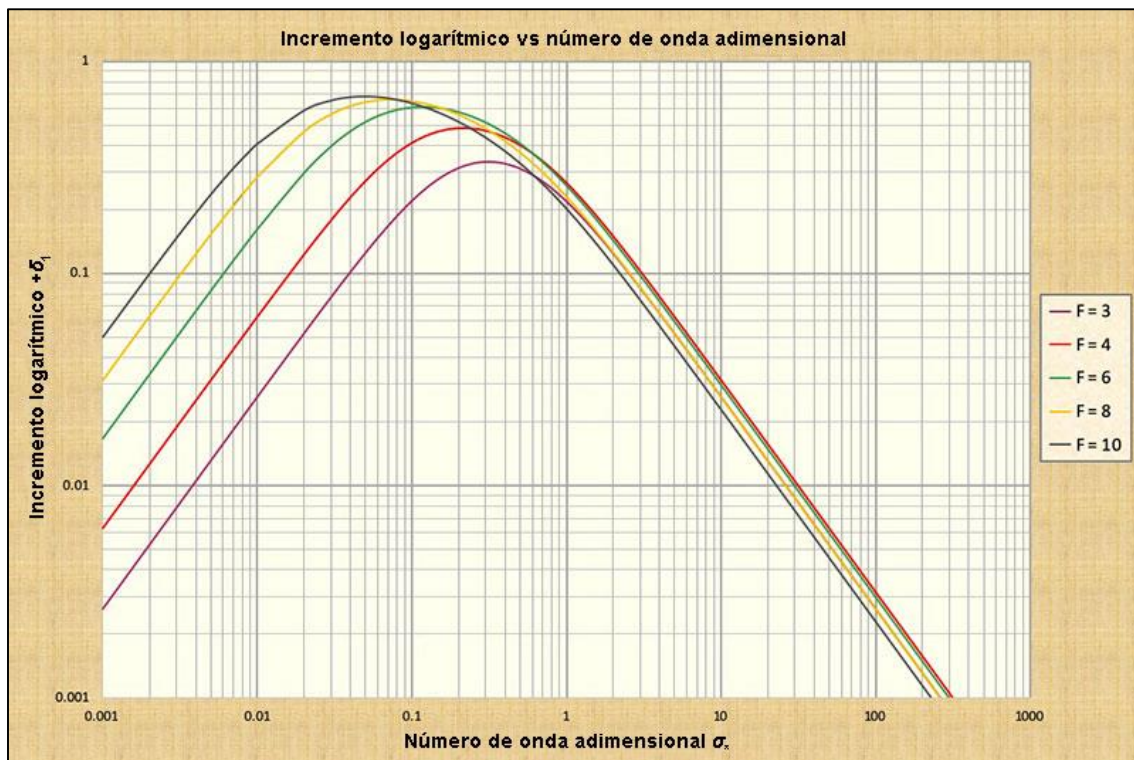


Fig. 3 Incremento logarítmico $+\delta_1$ de la onda primaria, versus el número de onda adimensional σ_* ; parámetro de curva: número de Froude F_o ($F_o > 2$).

Análisis de atenuación de la onda secundaria. Las Figuras 4 (a) y 4 (b) representan la variación del decremento logarítmico δ_2 para $0.01 \leq F_o \leq 10$ en función de σ_* . Se extraen las siguientes conclusiones: (1) En el flujo subcrítico, $F_o < 1$, la atenuación de la onda secundaria es muy fuerte y la fuerza disminuye a medida que σ_* aumenta en el grupo de gravedad (σ_* grande); (2) en el flujo crítico, $F_o = 1$, la atenuación de la onda secundaria es muy fuerte, con un mínimo alrededor del centro del grupo dinámico (valor intermedio de σ_*); y (3) en el flujo supercrítico, $F_o > 1$ la atenuación de la onda secundaria tiene el patrón mostrado. Para $F_o \geq 2$, δ_2 disminuye a medida que σ_* aumenta.

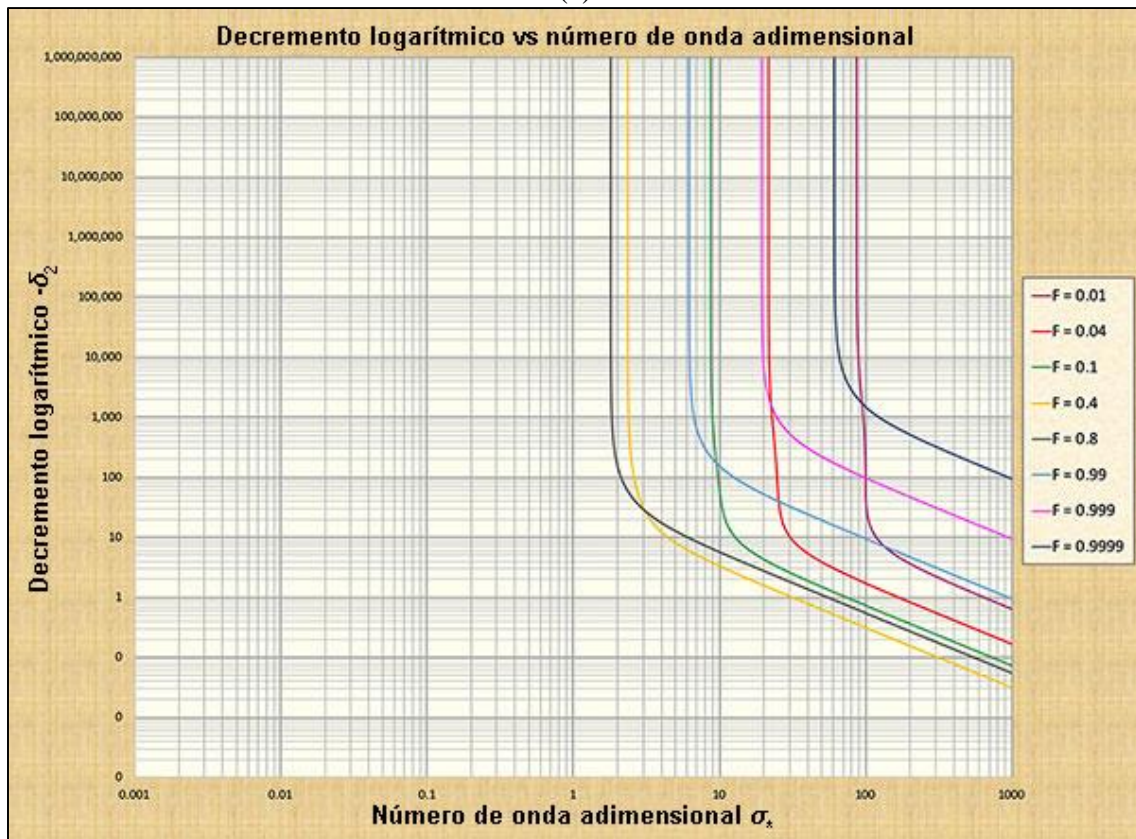
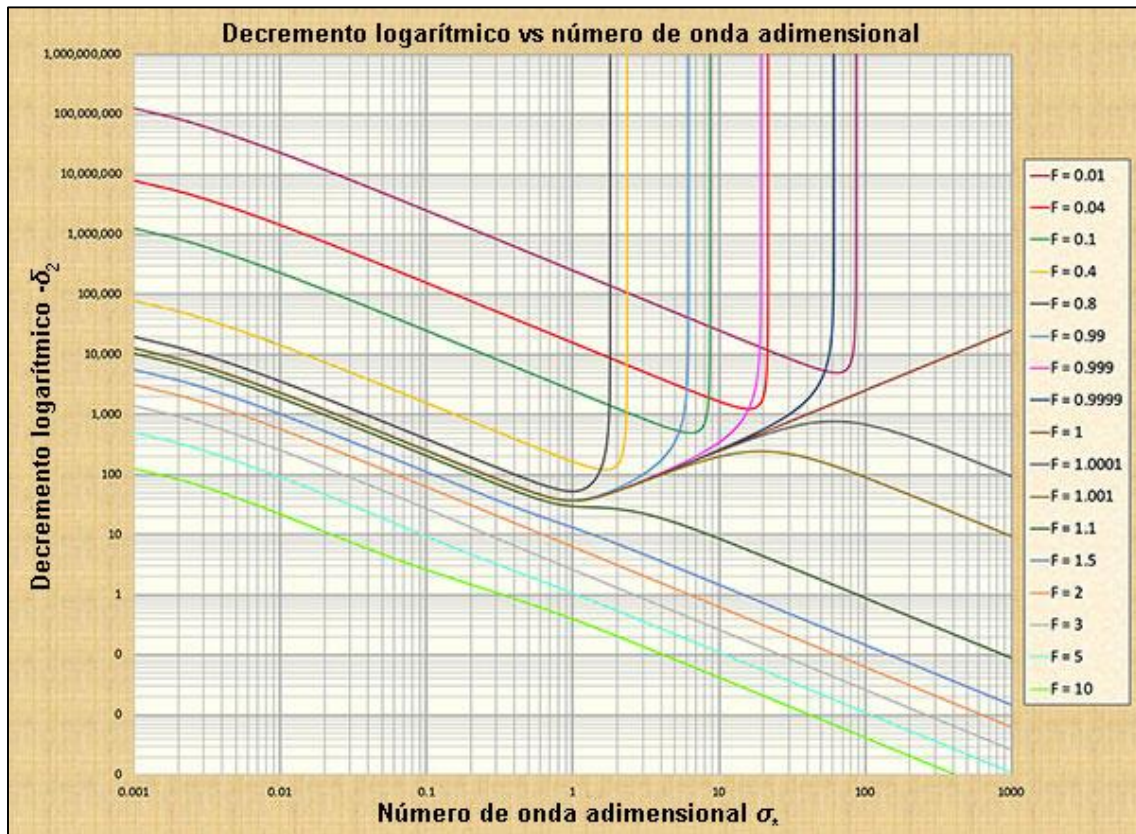


Fig. 4 Decremento logarítmico $-\delta_2$ de la onda secundaria versus el número de onda adimensional σ_* ; parámetro de curva: número de Froude F_o : (a) $0.01 \leq F_o \leq 10$; (b) $0.01 \leq F_o \leq 0.999$.

11. PROPAGACIÓN DE LA ONDA DINÁMICA

Se ha demostrado que la propagación de una onda dinámica es una función de dos parámetros adimensionales, el número de onda σ_* y el número de Froude F_o . El número de onda σ_* se puede interpretar como una relación de dos longitudes L y L_o , en la cual L es la longitud de onda y L_o es la longitud horizontal en la que el flujo uniforme permanente desciende una altura igual a su profundidad. El cuadrado del número de Froude F_o es la relación entre el doble de la altura de velocidad y la profundidad de flujo, en la cual la altura de velocidad h_{u_o} es:

$$h_{u_o} = \frac{u_o^2}{2g} \quad (61)$$

Para $F_o < 2$, la celeridad de una onda dinámica que se propaga aguas abajo es mayor que la celeridad de la onda cinemática y menor que la celeridad de la onda de gravedad. De hecho, la celeridad de la onda cinemática constituye un límite inferior al que tiende el valor dinámico a medida que el número de onda σ_* disminuye. Por el contrario, la celeridad de la onda de gravedad es un límite superior a la celeridad de la onda dinámica a medida que aumenta el número de onda σ_* . Para situar esta conclusión en la perspectiva adecuada, tal vez sea interesante citar aquí el trabajo de Stoker [(8), p. 486], con respecto a las celeridades de pequeñas perturbaciones y ondas progresivas:

...Lo que al parecer sucede es lo siguiente: los pequeños iniciadores de una perturbación viajan con una velocidad $(gd)^{1/2}$ relativa a la corriente de flujo, pero las fuerzas de resistencia actúan de tal manera que disminuyen la velocidad de la porción principal de la perturbación, muy por debajo de los valores dados por $(gd)^{1/2}$; es decir, Para un valor cercano que corresponde a la velocidad de una onda progresiva permanente que viaja sin cambios de forma...

Al revisar el trabajo de Stoker, es evidente que su referencia a una pequeña perturbación es a una onda con un gran valor de σ_* (onda de gravedad) y a una onda progresiva a aquella con un pequeño valor de σ_* (onda cinemática). Stoker prosigue elaborando en las limitaciones de los métodos de enrutamiento del flujo basados únicamente en el enfoque cinemático, para los casos en que los efectos dinámicos no pueden ignorarse.

Para $F_o \geq 2$, la celeridad de una onda dinámica que se propaga aguas abajo es menor que la celeridad de la onda cinemática y mayor que la celeridad de la onda de gravedad. De hecho, la celeridad de la onda cinemática es un límite superior del valor dinámico, mientras que la celeridad de la onda de gravedad es un límite inferior del valor dinámico.

Se puede obtener una conclusión significativa con respecto a la propagación dinámica de ondas del resumen presentado en la Tabla 2. Para ondas primarias, $F_o = 2$ es el umbral que divide las tendencias de atenuación ($F_o < 2$) y amplificación ($F_o > 2$). Para ondas secundarias, sin embargo, $F_o = 1$ es el umbral que divide la propagación aguas arriba ($F_o < 1$) o corriente abajo ($F_o > 1$) para ondas de gravedad. Por lo tanto, se comprueba que $F_o = 2$ es un valor umbral tan importante como $F_o = 1$ para describir la dinámica de los fenómenos de flujo en un canal abierto.

12. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Las características de propagación de varios tipos de ondas en aguas poco profundas, en el flujo de un canal abierto, se calculan usando la teoría de la estabilidad lineal. Se derivan las funciones de celeridad y atenuación de las ondas cinemática, de difusión, dinámica permanente, dinámica y de gravedad. Para el caso más general, es decir, el modelo de onda dinámico, las características de propagación se expresan como una función del número de Froude del flujo uniforme permanente y el número de onda adimensional del componente no permanente.

Para el modelo dinámico, el espectro del número de onda se divide en tres grupos: (1) Un grupo de gravedad, que corresponde a un número de onda grande, en la cual la celeridad de la onda es la celeridad de la onda de gravedad; (2) un grupo cinemático, que corresponde a un número de onda pequeño en el cual la celeridad de la onda es la celeridad de la onda cinemática; y (3) un grupo dinámico, que corresponde a los valores medios del espectro del número de onda, en la cual la celeridad de la onda se encuentra entre los valores de celeridad cinemática y de gravedad.

Las ondas dinámicas primarias se propagan aguas abajo y se atenúan para $F_o < 2$ y se amplifican para $F_o > 2$. En el umbral de $F_o = 2$, las ondas dinámicas primarias no se atenúan ni amplifican.

Para $F_o \leq 1$, las ondas dinámicas secundarias se propagan aguas arriba o aguas abajo, según el número de onda. Para $F_o = 1$, las ondas dinámicas secundarias permanecen estacionarias o se propagan aguas abajo, dependiendo del número de onda. Para $F_o > 1$, las ondas secundarias se propagan aguas abajo. Las ondas secundarias se atenúan en todo el espectro del número de onda.

13. APLICACIONES

El análisis de este artículo proporciona un marco apropiado para el estudio sistemático de las ondas en aguas poco profundas, en el flujo de un canal abierto. Se prevén numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran algunas de las más importantes:

1. La evaluación de la precisión de los modelos cinemáticos y de ondas de difusión, y la determinación de los criterios para su aplicabilidad.
2. El estudio de la formación de ondas de rollo (ondas pulsantes) en el flujo en canales abiertos. La presente teoría valida el hecho observado de que las ondas de rollo se forman para $F_o > 2$, ya que no puede haber amplificación de onda para $F_o \leq 2$ (usando la fricción de Chezy).
3. La teoría permite una comparación de los diversos modelos aproximados de ondas y una evaluación de sus propiedades y limitaciones.
4. Por último, la teoría proporciona un tratamiento coherente de la propagación de ondas en el flujo en canales abiertos. Las conclusiones podrían ser de interés para ingenieros y científicos que se ocupan de fenómenos de flujo no permanente en canales abiertos.

APÉNDICE I. BIBLIOGRAFÍA

1. DeSaint-Venant, B., "Theorie du Mouvement Non-permanent des Eaux avec Application aux Crues des Rivieris et l' Introduction des Varies dans leur Lit," Competes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Science, Paris, France, Vol. 73, 1871, pp. 148-154.
2. Henderson, F. M., Open Channel Flow, The MacMillan Co., New York, N.Y., 1966.
3. Lagrange, I. L., "Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides," Bulletin de la Classe des Sciences Academie Royal de Belique, No. 1783, pp. 151-198.
4. Liggett, J. A., "Basic Equations of Unsteady Flow," Unsteady Flow in Open Channels, K. Mahmood and V. Yevjevich, ed., Vol. 1, Water Resources Publications, Fort Collins, Colo., 1975.
5. Lighthill, M. J., and Whitham, G. B., "On Kinematic Waves I, Flood Movement in Long Rivers," Proceedings of the Royal Society of London, Vol. A229, May, 1955, pp. 281-316.
6. Lin, C. C., The Theory of Hydrodynamic Stability, 1st ed., The Cambridge University Press, London, England, 1966.
7. Ponce, V. M., and Mahmood, K., "Meandering Thalwegs in Straight Alluvial Channels," Proceedings of the 3rd Annual Symposium, ASCE, Waterways, Harbors, and Coastal Engineering Division, Vol. 2, Aug., 1976, pp. 1418-1441.
8. Stoker, J. J., Water Waves, the Mathematical Theory with Applications, Wiley Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1957.
9. Woolhiser, D. A., and Liggett, J. A., "Unsteady One-Dimensional Flow over a Plane-The Rising Hydrograph," Water Resources Research, Vol. 3, No. 3, Third Quarter, pp. 753-771, 1967.
10. Wylie, C. R., Advanced Engineering Mathematics, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1966.

APÉNDICE II. NOTACIÓN

En este documento se utilizan los siguientes símbolos:

- A = parámetro, definido por la Ec. 39;
 a = número entero;
 B = parámetro, definido por la Ec. 40;
 C = parámetro, definido por la Ec. 41;
 C_f = coeficiente de Chezy;
 D = parámetro, definido por la Ec. 50;
 d = profundidad de flujo;
 E = parámetro, definido por la Ec. 51;
 F_o = número de Froude de flujo uniforme permanente;
 f = factor de fricción, definido por la Ec. 7;
 g = aceleración de la gravedad;

h_u = carga de velocidad;
 k = número entero;
 L = longitud de onda;
 L_o = longitud horizontal en cual el flujo permanente cae una altura igual a su profundidad;
 l = número entero;
 p = número entero;
 S_f = pendiente de fricción;
 S_o = pendiente de fondo;
 T = período de onda;
 u = velocidad media;
 β_{*l} = factor de amplitud de propagación;
 β_{*R} = frecuencia adimensional;
 γ = peso unitario del agua;
 δ = decremento logarítmico;
 ζ = un tipo de número de flujo cinemático, según lo definido por la Ec. 37;
 θ = parámetro, definido por Ec. 43;
 σ_* = número de onda adimensional;
 τ = esfuerzo cortante de fondo; y
 ∞ = infinito.

Subíndices

d = onda difusiva;
 g = onda de gravedad;
 i = imaginario;
 k = onda cinemática;
 o = flujo uniforme permanente;
 R = real;
 r = relativo al flujo principal;
 s = onda dinámica estable;
1 = onda dinámica primaria; y
2 = onda dinámica secundaria.

Superíndices

' = variable de perturbación; y
* = función adimensional.